Comparaison actuarielle des garanties horizontale et verticale

Pierre Devolder
Sébastien de Valeriola

Comparer les deux garanties

UCL Université catholique de Louvain

CHAIRE d'excellence sur les PENSIONS

Deux approches différentes sont proposées pour l'application du taux de rendement minimum.

La question de leur **comparaison** se pose donc naturellement.

Il semble clair que la **variabilité des taux** d'intérêt joue ici un rôle significatif : l'évolution du taux OLO 10 ans a un impact sur chacune des deux garanties, mais cet impact est différent.

Il s'agit donc d'esquisser une comparaison qui tient compte de cette variabilité, c'est-à-dire d'effectuer celle-ci au sein d'un **modèle stochastique**.

Les hypothèses

Un modèle est une **simplification** de la réalité, et inclut par conséquent des hypothèses simplificatrices.

Nous faisons les hypothèses suivantes (qui ne devraient pas avoir d'impact sur la valeur relative des garanties l'une par rapport à l'autre) :

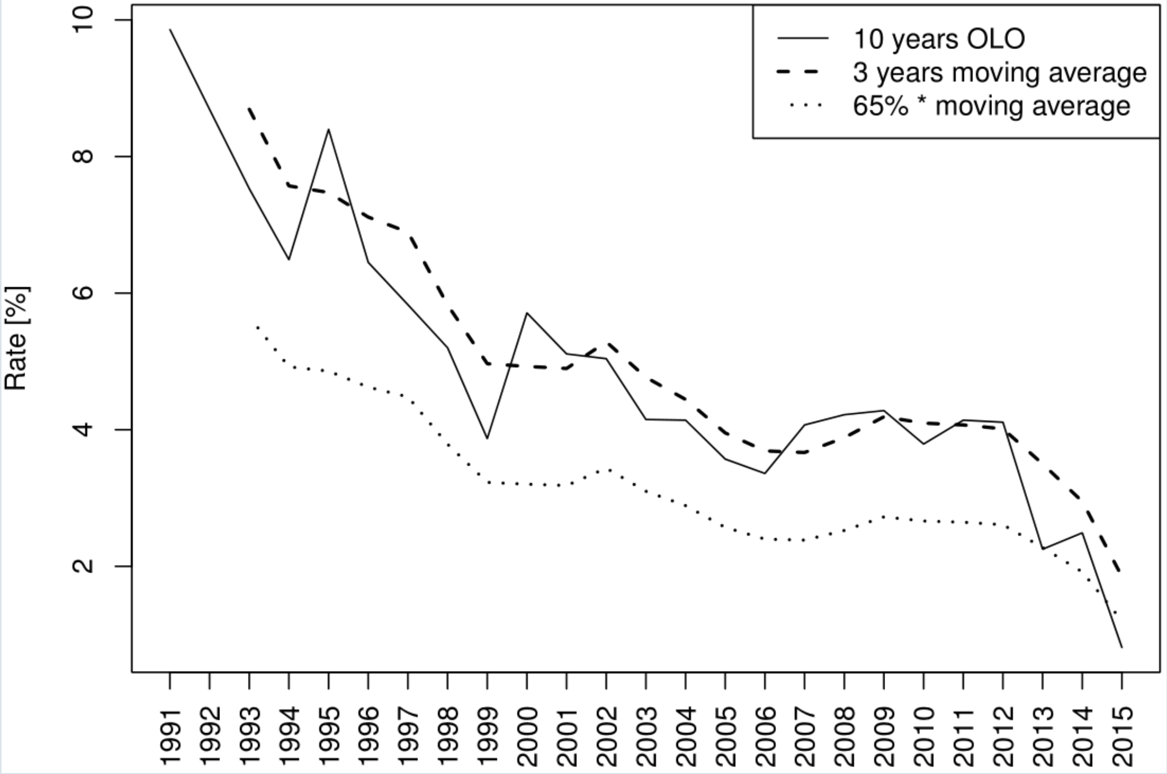
1. les obligations OLO ne paient pas de coupons ;
2. le taux de référence n'est pas une moyenne mobile sur 24 mois, mais une moyenne mobile sur 3 ans ;
3. pas de cap ni de floor sur le taux de référence ;
4. le taux court est un processus de **Vasicek** :

$$\mathrm{d}r_t = k(\theta - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

Le taux de référence

Le taux garanti minimum est alors donné par

$$R_t = 65\% \cdot \frac{r_{t-2}^{10} + r_{t-1}^{10} + r_t^{10}}{3}$$



Comparaison directe

La première comparaison que nous effectuons est directe.

Considérons deux capitaux d'1 € versés aujourd'hui dans le cadre de deux plans de pension complémentaire qui appliquent l'un la garantie horizontale et l'autre la garantie verticale.

On compare alors le capital obtenu **en moyenne** au moment de la retraite (i.e. 40 ans plus tard).

« Capital horizontal »	« Capital vertical »
$L_{40}^{h} = \exp\left(R_0 \cdot 40\right)$	$L_{40}^{v} = \prod_{t=0}^{39} \exp(R_t) = \exp\left(\sum_{t=0}^{39} R_t\right)$

Résultat

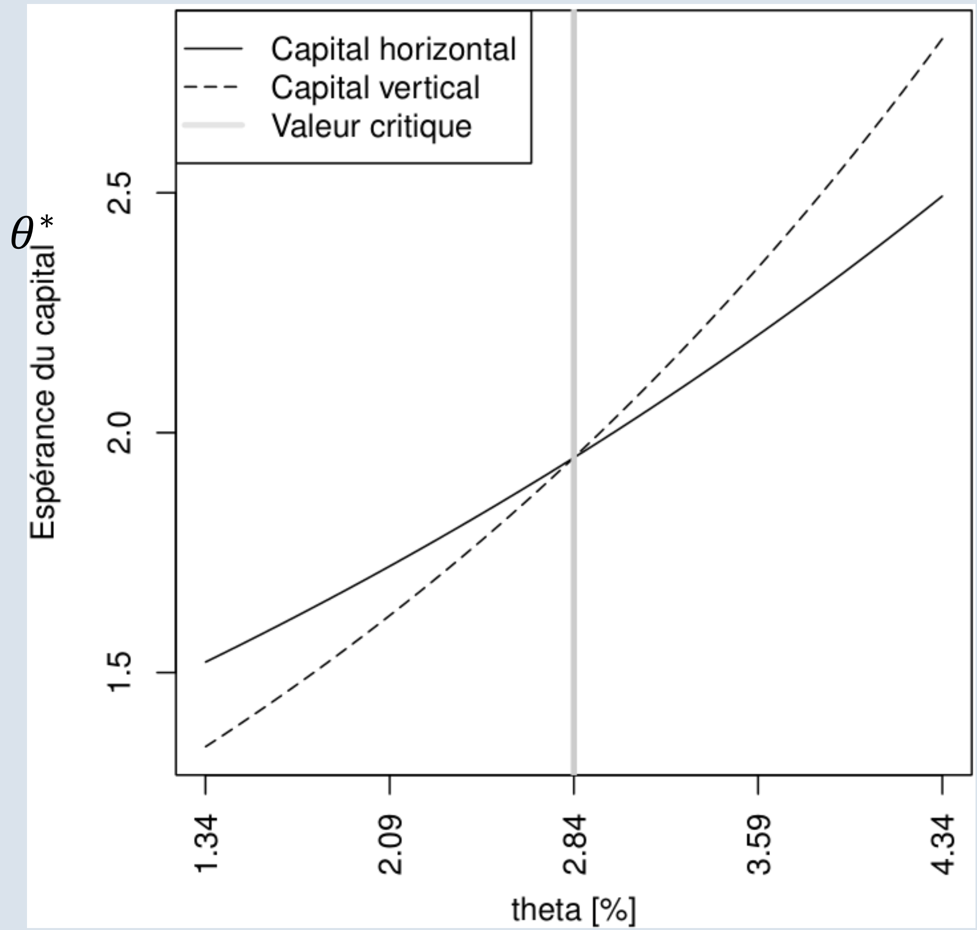
Une fois le calcul des deux moyennes effectué, il est possible de les comparer en faisant vairer certains des paramètres du modèle.

Le paramètre θ est crucial : il correspond au niveau moyen attendu à long terme pour le taux court.

Il existe une **valeur critique** θ^* telle que :

- si $\theta < \theta^*$, le capital horizontal est en moyenne plus intéressant que le capital vertical ;
- si $\theta > \theta^*$, le capital vertical est en moyenne plus intéressant que le capital horizontal.

La valeur de θ^* dépend non seulement de la **valeur actuelle** du taux court, mais aussi de sa **volatilité** !



Comparaison ALM

Un autre type d'analyse est intéressant à mener : une comparaison qui tient compte de la composition du **portefeuille d'actifs** représentatifs.

Considérons un assureur ou un fonds de pension qui offre la garantie de taux minimum.

Supposons qu'il a la possibilité d'investir dans trois actifs financiers :

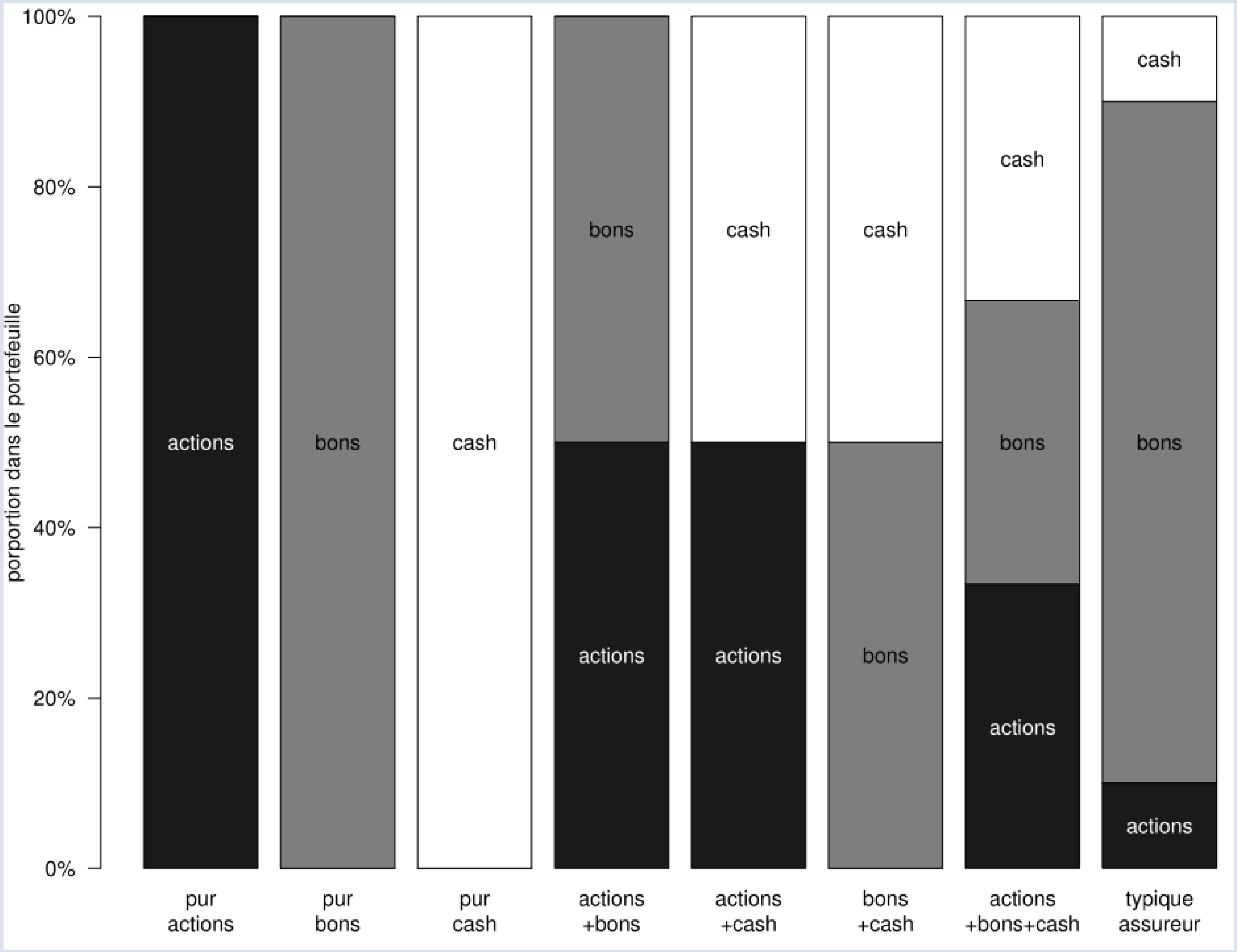
1. un compte en banque (*cash*) ;
2. une action ;
3. une obligation 10 ans de maturité mobile (*rolling bond*).

Peut-on déterminer, de la garantie horizontale et de la garantie verticale, laquelle correspond le mieux au portefeuille d'actifs choisi ?

Nous supposons ici que les paramètres sont choisis de telle façon qu'en moyenne les deux garanties donnent des résultats équivalents (i.e. $\theta = \theta^*$).

Comparaison ALM

Les portefeuilles d'actifs considérés sont les suivants :



Méthodologie de comparaison

Notre comparaison ALM consiste en la comparaison des prix de deux options d'échange.

Il s'agit d'instruments financiers donnant le droit, à maturité :

- d'échanger le portefeuille d'actifs contre le capital horizontal ;
- d'échanger le portefeuille d'actifs contre le capital vertical.

La **formule de Margrabe** permet de calculer le prix de telles options :

$$\mathrm{p_h} = 2\,\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{T\left(s_h^2 + s_a^2\ - 2\,c_{h,a}\right)}\right) - 1,$$

$$\mathrm{p_v} = 2\,\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{T\left(s_v^2 + s_a^2\ - 2\,c_{v,a}\right)}\right) - 1,$$

où s_h^2, s_v^2 et s_a^2 sont les volatilités du capital horizontal, du capital vertical et du portefeuille d''actifs et $c_{h,a}$ et $c_{v,a}$ sont les covariances entre le portefeuille d'actifs et les capitaux horizontal et vertical respectivement (tous ces processus sont actualisés).

Portefeuilles de cash et de bons

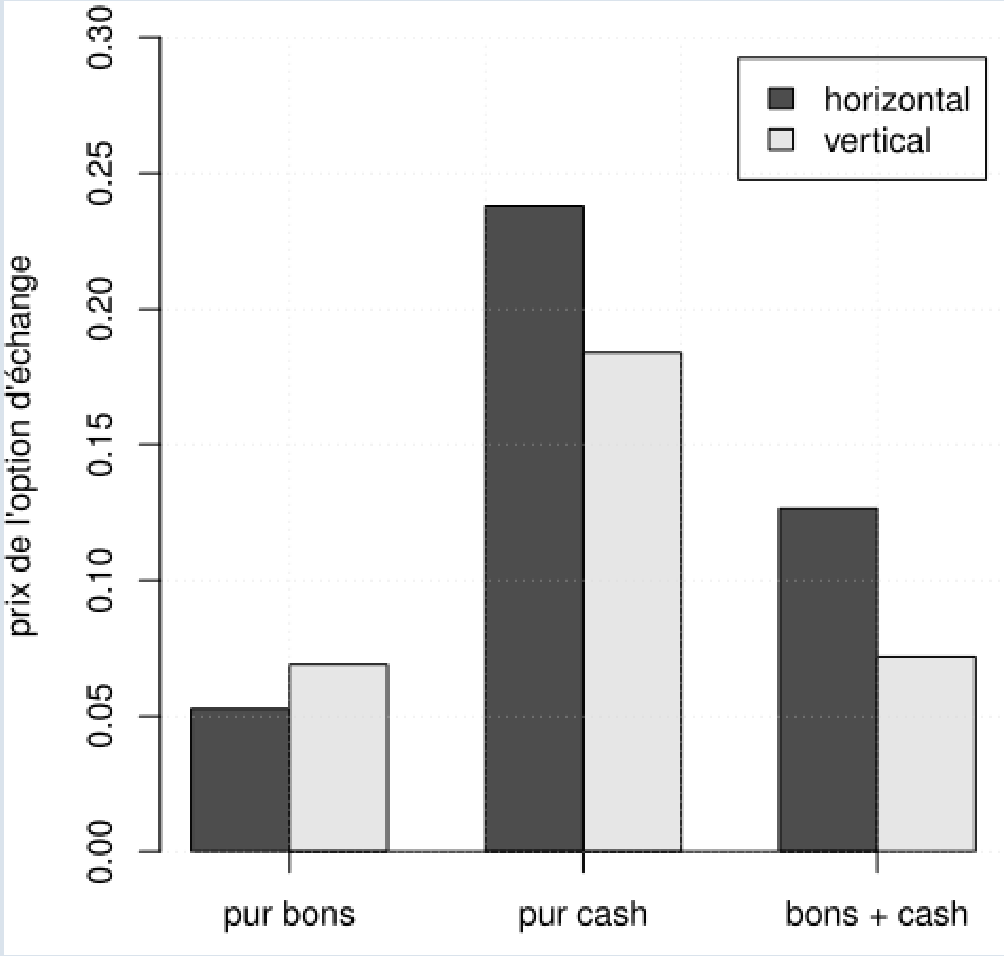
Il s'agit dès lors de chercher la garantie dont l'option correspondante coûte le moins cher.

Les portefeuilles composés uniquement de cash et d'obligations donnent les résultats suivants :

La garantie horizontale est la meilleure dans le cas d'un portefeuille composé uniquement d'obligations. Ce résultat est conforme à l'intuition, puisque la « philosophie » de la garantie horizontale est celle de l'obligation.

La garantie verticale est la meilleure dans le cas d'un portefeuille composé uniquement de cash. Ce résultat est conforme à l'intuition, puisque la « philosophie » de la garantie verticale est celle du compte en banque.

Dans le cas d'un portefeuille hybride (50% bons et 50% cash), c'est la garantie verticale qui est la plus intéressante.



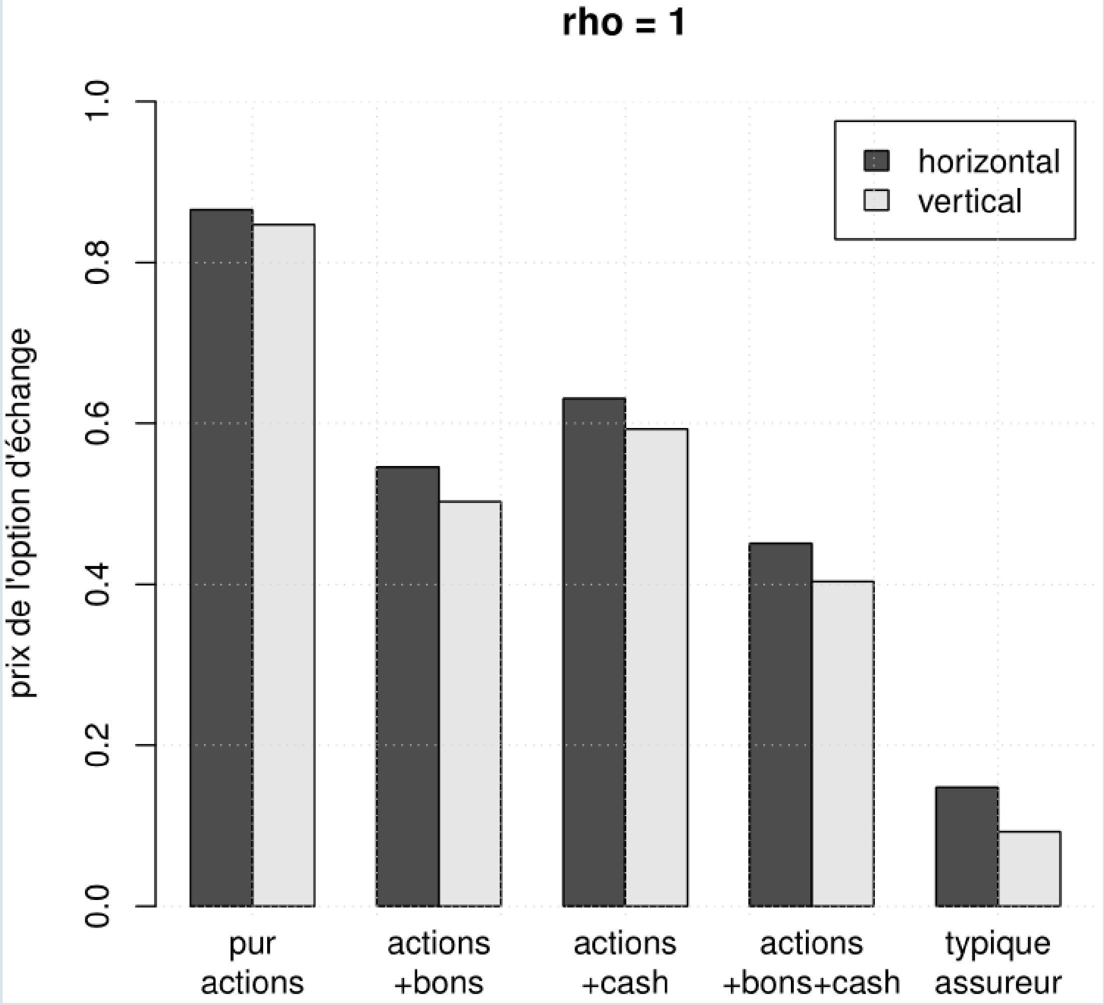
Portefeuilles avec des actions

Lorsque l'action est introduite dans le portefeuille, il est nécessaire de discuter la valeur de la corrélation entre celle-ci et le taux d'intérêt. On obtient alors :

Lorsque l'action est **corrélée positivement** avec le taux d'intérêt, la garantie verticale est plus intéressante dans tous les cas.

Il est important de noter ici que l'échelle du graphe (0-1) ci-contre est différente de celle du graphe précédent (0-0.3).

L'incorporation de l'action dans le portefeuille d'actifs augmente significativement le prix des options d'échange.



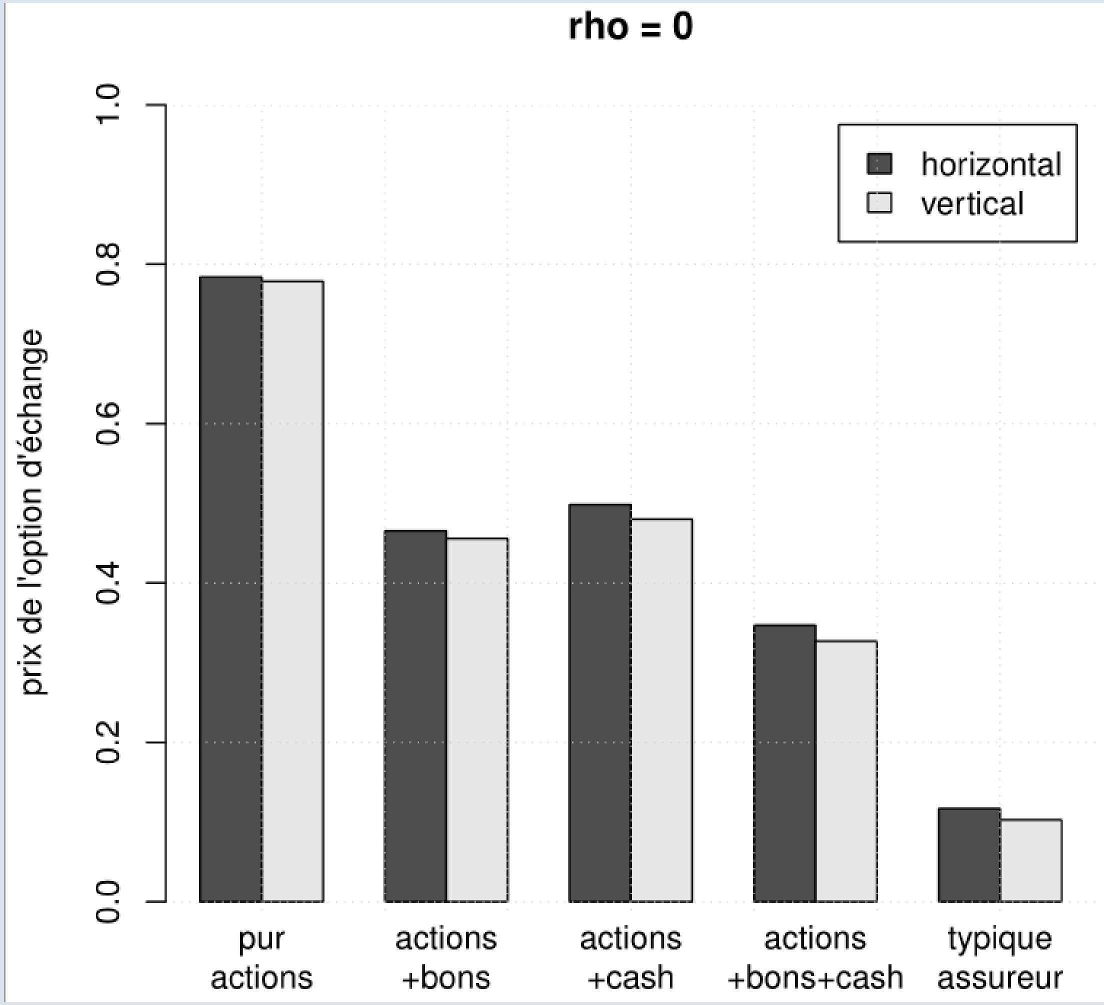
Portefeuilles avec des actions

Lorsque l'action est introduite dans le portefeuille, il est nécessaire de discuter la valeur de la corrélation entre celle-ci et le taux d'intérêt. On obtient alors :

Lorsque l'action n'est **pas corrélée** avec le taux d'intérêt, la garantie verticale est légèrement plus intéressante dans tous les cas.

Lorsque ρ passe de 1 à 0, les prix baissent. On fait la même observation lorsque ρ passe de 0 à -1 (voir slide suivant).

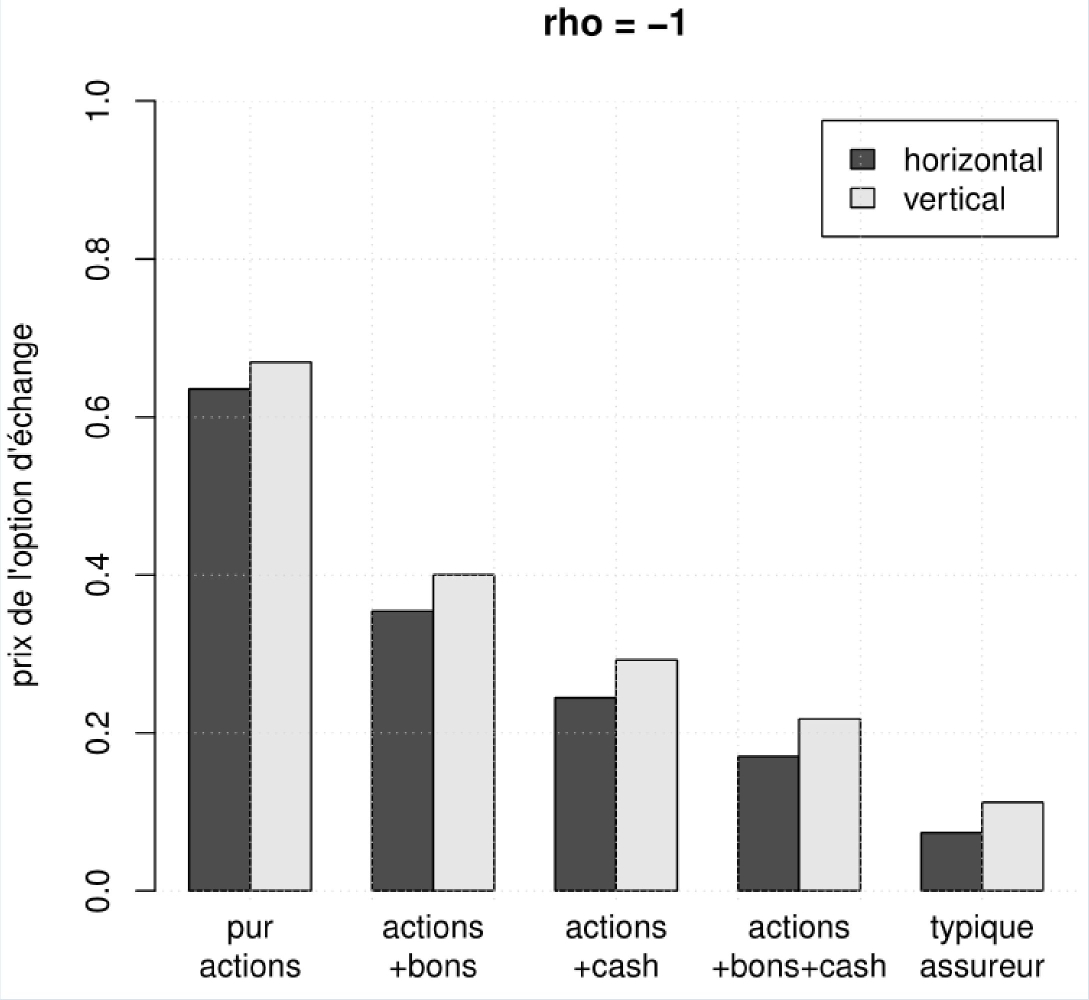
Ce phénomène est conforme à l'intuition, puisque le prix de l'option d'échange dépend de **l'écart** entre les deux instruments considérés.



Portefeuilles avec des actions

Lorsque l'action est introduite dans le portefeuille, il est nécessaire de discuter la valeur de la corrélation entre celle-ci et le taux d'intérêt. On obtient alors :

Lorsque l'action est **corrélée négativement** avec le taux d'intérêt, la garantie horizontale est plus intéressante dans tous les cas.



Conclusions

En comparant directement les capitaux obtenus avec les deux approches, nous avons montré que :

- la garantie verticale est plus intéressante dans un marché des taux en hausse ;
- la garantie horizontale est plus intéressant dans un marché des taux en baisse.

En utilisant une vision *Asset-Liability Management*, nous avons montré que :

- la garantie horizontale est plus intéressante pour :
  - des portefeuilles composés en majeure partie de bons 10 ans ;
  - des portefeuilles composés d'actions (et d'autres actifs) si celles-ci sont négativement corrélées avec les taux ;
- la garantie verticale est plus intéressante pour :
  - des portefeuilles composés d'obligations et de cash en proportion suffisante ;
  - des portefeuilles composés d'actions (et d'autres actifs) si celles-ci sont positivement corrélées ou non corrélées avec les taux.